

**שים לב:** בבחינה זו יש הנחיות מיוחדות.  
יש לענות על השאלות על פי הנחיות אלה.

## מתמטיקה

### 5 יחידות לימוד – שאלון ראשון

#### הוראות לנבחן

א. משך הבחינה: שלוש שעות וחצי.

ב. מבנה השאלון ומפתח ההערכה: בשאלון זה שלושה פרקים, ובהם שמונה שאלות.

פרק ראשון – אלגברה והסתברות

פרק שני – גאומטריה וטריגונומטריה במישור

פרק שלישי – חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים, של פונקציות שורש,

של פונקציות רציונליות ושל פונקציות טריגונומטריות

עליך לענות על חמש שאלות לבחירתך –  $20 \times 5 = 100$  נקודות.

ג. חומר עזר מותר בשימוש:

(1) מחשבון לא גרפי. אין להשתמש באפשרויות התכנות במחשבון שיש בו אפשרות תכנות.

שימוש במחשבון גרפי או באפשרויות התכנות במחשבון עלול לגרום לפסילת הבחינה.

(2) דפי נוסחאות (מצורפים).

ד. הוראות מיוחדות:

(1) אל תעתיק את השאלה; סמן את מספרה בלבד.

(2) התחל כל שאלה בעמוד חדש. רשום במחברת את שלבי הפתרון, גם כאשר החישובים מתבצעים בעזרת מחשבון.

הסבר את כל פעולותיך, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה ומסודרת.

חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.

כתוב במחברת הבחינה בלבד. רשום "טיוטה" בראש כל עמוד המשמש טיוטה.

כתיבת טיוטה בדפים שאינם במחברת הבחינה עלולה לגרום לפסילת הבחינה.

**ההנחיות בשאלון זה מנוסחות בלשון זכר ומכוונות לנבחנות ולנבחנים כאחד.**

**בהצלחה!**

## השאלות

**שים לב:** הסבר את כל פעולותיך, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה. חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.

ענה על חמש מן השאלות 1-8 (לכל שאלה – 20 נקודות).

**שים לב:** אם תענה על יותר מחמש שאלות, ייבדקו רק חמש התשובות הראשונות שבמחברתך.

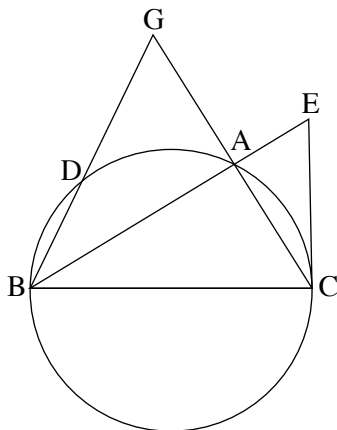
## פרק ראשון – אלגברה והסתברות

1. שלושה שחיינים – איתן, גל ויעקב – מתאמנים בשחייה בבריכה שאורכה 50 מטרים. כל שחיין מתחיל את שחייתו בתחילת הבריכה, שוחה עד סוף הבריכה, ומייד מסתובב ושוחה חזרה לתחילת הבריכה. מהירות השחייה של כל אחד מן השחינים היא קבועה. ביום א' התחיל כל אחד משלושת השחינים את שחייתו בזמן אחר. גל התחיל לשחות 10 שניות אחרי איתן. יעקב התחיל לשחות 15 שניות אחרי איתן. 15 שניות אחרי שהתחיל יעקב לשחות, עברו כל השחינים את אותו המרחק מתחילת הבריכה, אך עדיין לא הגיעו לסוף הבריכה. מייד לאחר שהגיע גל לסוף הבריכה, הוא הסתובב והתחיל לשחות חזרה לתחילת הבריכה. בדרכו חזרה, הוא פגש את איתן במרחק של 4 מטרים מסוף הבריכה. א. חשב את המהירות של כל אחד משלושת השחינים. ב. במרחק של כמה מטרים מסוף הבריכה נפגשו איתן ויעקב בפעם השנייה? ביום ב' התחילו גל ויעקב את שחייתם באותו זמן בתחילת הבריכה, וכל אחד מהם שחה באותה מהירות שבה שחה ביום א'. כשהגיע כל אחד משני השחינים לסוף הבריכה, הוא הסתובב מייד ושחה לכיוון תחילת הבריכה, וכשהגיע לשם, הסתובב שוב ושחה לכיוון סוף הבריכה, וחוזר חלילה. שני השחינים הפסיקו לשחות ברגע שהם נפגשו בתחילת הבריכה. ג. כמה מטרים שחה יעקב ביום זה?

2. נתונה סדרה חשבונית A עולה שאיבריה הם  $a_1, a_2, a_3, \dots$ , והפרשה d. מסמנים ב-  $S_n$  את סכום n האיברים הראשונים בסדרה A, לכל n טבעי. מגדירים סדרה נוספת, B, שאיבריה הם  $b_1, b_2, b_3, \dots$ . איברי הסדרה B מקיימים  $b_n = S_{n+1} - S_n$ , לכל n טבעי.
- א. (1) האם הסדרה B היא סדרה חשבונית? נמק.  
 (2) האם הסדרה B זהה לסדרה A? נמק.
- מסמנים ב-  $T_n$  את סכום n האיברים הראשונים בסדרה B, לכל n טבעי.
- ב. הוכח כי לכל n טבעי זוגי מתקיים:
- $$T_n = \frac{(b_1 + b_2)(b_1 - b_2) + (b_3 + b_4)(b_3 - b_4) + \dots + (b_{n-1} + b_n)(b_{n-1} - b_n)}{-d}$$
- נתון:  $b_1^2 - b_2^2 + b_3^2 - b_4^2 + \dots + b_{39}^2 - b_{40}^2 = -95$   
 $T_5 = -20$
- ג. חשב את  $b_1$  ואת d (אפשר להיעזר בסעיף ב).
- מחברים בזה אחר זה את איברי הסדרה A הנמצאים במקומות האי-זוגיים, החל באיבר הראשון.
- ד. מהו המספר המינימלי של איברים שיש לחבר באופן זה כדי שהסכום שיתקבל יהיה מספר חיובי שלם? נמק.

3. בקופסה יש שלוש סוכריות בטעם תות ושתי סוכריות בטעם מנטה. ליאור מוציא באקראי סוכרייה מן הקופסה. אם הסוכרייה היא בטעם מנטה – הוא מחזיר אותה לקופסה, ואם היא בטעם תות – הוא אוכל אותה מייד.
- א. ליאור מוציא מן הקופסה שלוש סוכריות בזו אחר זו באופן המתואר בתחילת השאלה.
- (1) חשב את ההסתברות שליאור יאכל בדיוק סוכרייה אחת.  
 (2) חשב את ההסתברות שליאור אכל את הסוכרייה השנייה שהוא הוציא, אם ידוע כי ליאור אכל בדיוק סוכרייה אחת.
- ב. ליאור מוציא מן הקופסה n סוכריות בזו אחר זו באופן המתואר בתחילת השאלה. הבע בעזרת n את ההסתברות שליאור יאכל סוכרייה אחת לפחות.
- ג. ליאור קיבל שתי קופסאות סוכריות, כל אחת מהן זהה לקופסה המתוארת בתחילת השאלה. ליאור מוציא שלוש סוכריות מכל אחת משתי הקופסאות, באופן המתואר בתחילת השאלה. חשב את ההסתברות שליאור יאכל בדיוק שלוש סוכריות, שלושתן מאותה קופסה.

**פרק שני – גאומטריה וטריגונומטריה במישור**



4. משולש ABC חסום במעגל שרדיוסו R (ראה סרטוט).

הצלע BC היא קוטר במעגל.

AG הוא המשך הצלע CA.

הקטע GB חותך את המעגל בנקודה D.

נתון:  $GA = AC$ .

א. הוכח כי הישר AB חוצה את  $\angle GBC$ .

ב. הוכח כי  $\triangle GBC \sim \triangle GAD$ .

נתון כי  $\frac{S_{DBCA}}{S_{GAD}} = 15$ .

ג. הבע באמצעות R את אורך הצלע AC.

דרך הנקודה C העבירו משיק למעגל שחותך את המשך הקטע BA בנקודה E.

ד. חשב פי כמה גדול שטח המשולש CBE משטח המשולש ABC.

5. AB הוא קוטר במעגל שרדיוסו R ומרכזו O. המיתר CD חותך את הקוטר AB בנקודה F.

המשק למעגל בנקודה D חותך את המשך הקוטר AB בנקודה E (ראה סרטוט).

נסמן:  $\angle ADE = \alpha$ .

א. הראה כי  $\angle BAD = 90^\circ - \alpha$ .

נתון כי  $ED = FD$ .

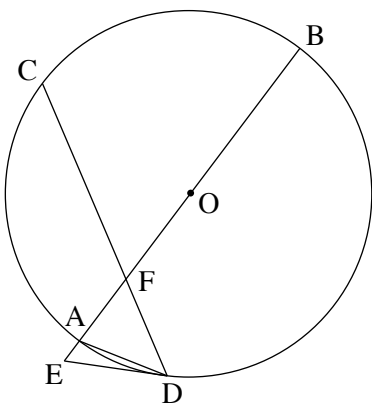
ב. הבע באמצעות  $\alpha$  את גודל  $\angle CDA$ .

ג. הבע באמצעות R ו- $\alpha$  את שטח המשולש AFD.

ד. הבע באמצעות  $\alpha$  את יחס השטחים  $\frac{S_{AFD}}{S_{AED}}$ .

(2) נתון כי  $\frac{S_{AFD}}{S_{AED}} = 1 + \sqrt{3}$ .

מצא את  $\alpha$ .



**פרק שלישי – חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים,  
של פונקציות שורש, של פונקציות רציונליות  
ושל פונקציות טריגונומטריות**

6. נתונה הפונקציה  $f(x) = \frac{x^2}{(x^3 - m)^2}$ ,  $m$  הוא פרמטר חיובי.

א. הבע את תשובותיך באמצעות  $m$ , אם יש צורך.

(1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה  $f(x)$ .

(2) מצא את משוואות האסימפטוטות של הפונקציה  $f(x)$  המאונכות לצירים.

ידוע כי לפונקציה  $f(x)$  יש נקודת קיצון בנקודה שבה  $x = -1$ .

ב. מצא את הערך של  $m$ .

הצב בפונקציה  $f(x)$  את הערך של  $m$  שמצאת, וענה על הסעיפים ג-ה.

ג. מצא את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה  $f(x)$ , וקבע את סוגן.

ד. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה  $f(x)$ .

ה. נתונה הפונקציה  $g(x) = k \cdot f(x)$ ,  $k$  הוא פרמטר שלילי.

(1) סרטט סקיצה אפשרית של גרף הפונקציה  $g(x)$ .

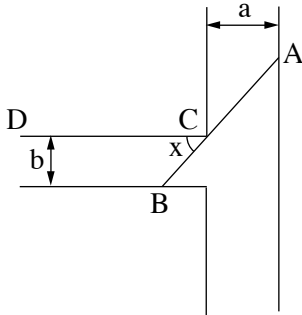
(2) דרך נקודת הקיצון השמאלית של  $g(x)$  מעבירים אנך לציר ה- $x$ .

נתון כי השטח המוגבל על ידי האנך, על ידי גרף הפונקציה  $g(x)$  ועל ידי ציר ה- $x$  הוא 1 (השטח שמימין לאנך).

מצא את הערך של  $k$ .

7. נתונה הפונקציה  $f(x) = 3x + 2 \cdot \sqrt{x^2 - 2x}$ .

- א. (1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה  $f(x)$ .  
 (2) מצא את תחום ההגדרה של פונקציית הנגזרת  $f'(x)$ .  
 (3) מצא את משוואות האסימפטוטות המאונכות לצירים של פונקציית הנגזרת  $f'(x)$ .  
 (4) מצא את שיעורי נקודת החיתוך של גרף פונקציית הנגזרת  $f'(x)$  עם ציר ה- $x$ .  
 בתשובתך דייק שתי ספרות אחרי הנקודה העשרונית.  
 (5) סרטט סקיצה של גרף פונקציית הנגזרת  $f'(x)$ , אם ידוע כי לפונקציית הנגזרת  $f'(x)$  אין נקודות קיצון.  
 ב. (1) מצא את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה  $f(x)$ , וקבע את סוגן.  
 (2) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה  $f(x)$ .  
 ג. האם ייתכן שישר שמשוואתו  $y = 4x + c$  (פרמטר  $c$ ) ישיק לגרף הפונקציה  $f(x)$ ? נמק.



8. תעלת מים ראשית ברוחב קבוע  $a$  מחוברת בניצב לתעלה משנית ברוחב קבוע  $b$ . הנקודה  $C$  היא נקודת המפגש בין דופן של התעלה הראשית ובין דופן של התעלה המשנית (ראה סרטוט). מהנדסת מתכננת סכר ישר, שיצא מן הנקודה  $A$  שבדופן התעלה הראשית, יעבור דרך הנקודה  $C$  ויגיע עד הנקודה  $B$  שבדופן התעלה המשנית. הסכר ייצור זווית שגודלה  $x$  עם הדופן  $CD$  של התעלה המשנית, כמתואר בסרטוט.  
 א. הבע באמצעות  $a$ ,  $b$  ו- $x$  את אורך הסכר  $AB$ .  
 נתון כי  $a = 2b$ .  
 ב. מצא את  $x$  שבעבורו אורך הסכר  $AB$  יהיה מינימלי.  
 ג. ידוע כי האורך המינימלי של הסכר הוא 8. מצא את  $b$ .

### בהצלחה!