

שימו לב: בבחינה זו יש הנחיות מיוחדות.
יש לענות על השאלות על פי הנחיות אלה.

מתמטיקה

5 יחידות לימוד – שאלון שני

הוראות

א. משך הבחינה: שלוש שעות.

ב. מבנה השאלון ומפתח ההערכה: בשאלון זה שני פרקים, ובהם חמש שאלות.

פרק ראשון – גאומטרייה אנליטית, וקטורים, טריגונומטרייה במרחב, מספרים מרוכבים
פרק שני – גדילה ודעיכה, פונקציות חזקה, פונקציות מעריכיות ולוגריתמיות
יש לענות על שלוש שאלות לבחירתכם – $3 \times 33\frac{1}{3} = 100$ נקודות.

ג. חומר עזר מותר בשימוש:

- (1) מחשבון לא גרפי. אין להשתמש באפשרויות התכנות במחשבון שיש בו אפשרות תכנות. שימוש במחשבון גרפי או באפשרויות התכנות במחשבון עלול לגרום לפסילת הבחינה.
- (2) דפי נוסחאות (מצורפים).

ד. הוראות מיוחדות:

- (1) אין להעתיק את השאלה; יש לסמן את מספרה בלבד.
- (2) יש להתחיל כל שאלה בעמוד חדש. יש לרשום במחברת את שלבי הפתרון, גם כאשר החישובים מתבצעים בעזרת מחשבון.
יש להסביר את כל הפעולות, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה ומסודרת.
חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.

יש לכתוב במחברת הבחינה בלבד. יש לרשום "טיוטה" בראש כל עמוד המשמש טיוטה.
כתיבת טיוטה בדפים שאינם במחברת הבחינה עלולה לגרום לפסילת הבחינה.

השאלות בשאלון זה מנוסחות בלשון רבים, אף על פי כן על כל תלמידה וכל תלמיד להשיב עליהן באופן אישי.

בהצלחה!

השאלות

ענו על שלוש מן השאלות 1-5 (לכל שאלה – $33\frac{1}{3}$ נקודות).

שימו לב: אם תענו על יותר משלוש שאלות, ייבדקו רק שלוש התשובות הראשונות שבמחברתכם.

פרק ראשון – גאומטרייה אנליטית, וקטורים, טריגונומטרייה במרחב, מספרים מרוכבים

1. במשולש ישר זווית ABC ($\sphericalangle BAC = 90^\circ$), שיעורי הקודקוד A הם $(a, 0)$, a הוא פרמטר שונה מאפס. שיעור ה- x של הקודקוד B הוא $-a$. הצלע BC מקבילה לציר ה- x . הנקודה M היא אמצע הצלע BC .
- א. הביעו באמצעות a את משוואת המקום הגאומטרי שעליו נמצאות כל הנקודות M .
- ב. סרטטו את העקום המתואר על ידי המשוואה שמצאתם בסעיף א. סרטטו את שתי האפשרויות במערכת צירים אחת.
- באחת מן הנקודות M , שנמצאת ברביע הראשון, העבירו ישר l המשיק למקום הגאומטרי שמצאתם בסעיף א.
- ג. הוכיחו כי הישר l מקביל לישר AC .
- נתון גם כי $AM = 5$ (הנקודה M נמצאת ברביע הראשון), והקודקוד B נמצא על הישר $x = -1$.
- ד. מצאו את שיעורי הקודקודים B ו- C .
- דרך הקודקוד A העבירו מעגל המשיק לישרים l ו- AC .
- ה. מצאו את שיעורי מרכז המעגל.

2. נתונים הישר l והמישור π .

ההצגה הפרמטרית של הישר l היא $\underline{x} = (-1, 5, -11) + t \cdot (m-1, 5-m, -2)$.
משוואת המישור π היא $3x + my + (m+6)z + 4 = 0$.
 m הוא פרמטר.

א. הראו כי לכל ערך של m הישר l אינו מקביל למישור π .

נתון כי הישר l ניצב למישור π וחותר אותו בנקודה A .

ב. מצאו את הערך של הפרמטר m .

ג. מצאו את שיעורי הנקודה A .

ד. לפניכם טענה:

קיים מישור אחד בלבד המכיל את הישר l ועובר דרך הנקודה $(11, -15, -7)$.

קבעו אם הטענה נכונה או לא נכונה. נמקו את קביעתכם.

3. $z = x + yi$ הוא מספר מרוכב (x ו- y הם מספרים ממשיים).

א. הראו כי המקום הגאומטרי של כל הנקודות (x, y) במישור גאוס המקיימות:

$$|6 - \bar{z} - 8i|^2 - |5i| = |12 + 16i|$$

הנקודה M היא מרכז המעגל המתואר בסעיף א.

המספרים המרוכבים z_A ו- z_M מייצגים את הנקודות A ו- M , בהתאמה.

נתון: למספרים z_A ו- z_M יש אותו ארגומנט (זווית).

$$2|z_A| = |z_M|$$

ב. מצאו את שיעורי הנקודה A .

נתונה סדרה הנדסית z_1, z_2, z_3, \dots .

האיבר הראשון בסדרה מייצג את הנקודה A , והאיבר החמישי בסדרה מייצג את הנקודה M .

ג. מצאו את מנת הסדרה (כל האפשרויות).

ד. חשבו את הסכום: $z_1 \cdot \bar{z}_1 + z_2 \cdot \bar{z}_2 + \dots + z_{10} \cdot \bar{z}_{10}$.

פרק שני – גדילה ודעיכה, פונקציות חזקה, פונקציות מעריכיות ולוגריתמיות

4. נתונות הפונקציות: $f(x) = \frac{a - x^2}{e^x}$, $g(x) = \frac{(x+1)^2}{e^x}$ המוגדרות לכל x . a הוא פרמטר.

א. מצאו את הערך של a שבעבורו $f(x) = g'(x)$ לכל ערך של x .

הציבו את הערך של a שמצאתם, וענו על הסעיפים ב-ה שלפניכם.

ב. (1) מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקצייה $f(x)$ עם הצירים.

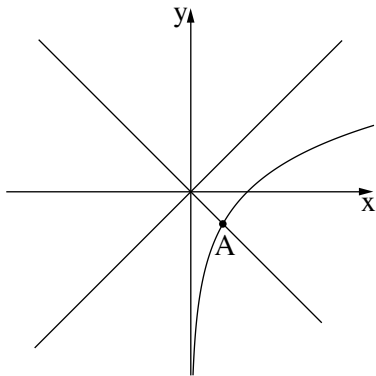
(2) מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקצייה $g(x)$ עם הצירים.

(3) מצאו את שיעורי נקודות הקיצון של כל אחת מן הפונקציות $f(x)$ ו- $g(x)$, וקבעו את סוגן.

ג. סרטטו באותה מערכת צירים סקיצות של גרף הפונקצייה $f(x)$ ושל גרף הפונקצייה $g(x)$.

ד. חשבו את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקצייה $f(x)$ ועל ידי ציר ה- x .

ה. חשבו את הערך של הביטוי: $\int_1^4 \left(\frac{e^{2x}}{(x+1)^4} \right) \cdot \left(\frac{x^2-1}{e^x} \right) dx$



5. בסרטוט שלפניכם מתואר הגרף של הפונקצייה $f(x) = \ln(x)$ המוגדרת בתחום $x > 0$,

ומתוארים הישרים $y = x$ ו- $y = -x$.

הנקודה A היא נקודת החיתוך של גרף הפונקצייה $f(x)$ עם אחד מן הישרים.

נסמן את שיעור ה- x של הנקודה A ב- a .

היעזרו בסרטוט, וענו על הסעיפים א-ה שלפניכם.

הביעו את תשובותיכם באמצעות a אם יש צורך.

נתונה הפונקצייה: $g(x) = \frac{\ln(x) - x}{\ln(x) + x}$.

א. (1) מצאו את תחום ההגדרה של הפונקצייה $g(x)$.

(2) מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקצייה $g(x)$ עם ציר ה- x (אם יש כאלה).

(3) מצאו את משוואת האסימפטוטה המקבילה לציר ה- x של הפונקצייה $g(x)$.

ב. הסבירו מדוע מתקיים $0 < a < 1$.

ג. (1) מצאו את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקצייה $g(x)$, וקבעו את סוגה.

(2) מצאו את תחומי העלייה והירידה של הפונקצייה $g(x)$.

ד. סרטטו סקיצה של גרף הפונקצייה $g(x)$.

ה. סרטטו סקיצה של גרף הפונקצייה $h(x) = e^{g(x)}$.

בהצלחה!