

שימו לב: בבחינה זו יש הנחיות מיוחדות.
יש לענות על השאלות על פי הנחיות אלה.

מתמטיקה

5 יחידות לימוד – שאלון שני

הוראות

- א. משך הבחינה: שעתיים ורבע.
- ב. מבנה השאלון ומפתח ההערכה: בשאלון זה שני פרקים, ובהם חמש שאלות.
פרק ראשון – גאומטרייה אנליטית, וקטורים, טריגונומטרייה במרחב, מספרים מרוכבים
פרק שני – גדילה ודעיכה, פונקציות חזקה, פונקציות מעריכיות ולוגריתמיות
יש לענות על שלוש שאלות לבחירתכם, לפחות על שאלה אחת מכל פרק – $3 \times \frac{1}{3} = 100$ נקודות.
- ג. חומר עזר מותר בשימוש:
(1) מחשבון לא גרפי. אין להשתמש באפשרויות התכנות במחשבון שיש בו אפשרות תכנות.
שימוש במחשבון גרפי או באפשרויות התכנות במחשבון עלול לגרום לפסילת הבחינה.
(2) דפי נוסחאות (מצורפים).
- ד. הוראות מיוחדות:
(1) אין להעתיק את השאלה; יש לסמן את מספרה בלבד.
(2) יש להתחיל כל שאלה בעמוד חדש. יש לרשום במחברת את שלבי הפתרון, גם כאשר החישובים מתבצעים בעזרת מחשבון.
יש להסביר את כל הפעולות, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה ומסודרת.
חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.
יש לכתוב במחברת הבחינה בלבד. יש לרשום "טיוטה" בראש כל עמוד המשמש טיוטה.
כתובת טיוטה בדפים שאינם במחברת הבחינה עלולה לגרום לפסילת הבחינה.

השאלות בשאלון זה מנוסחות בלשון רבים, אף על פי כן על כל תלמידה וכל תלמיד להשיב עליהן באופן אישי.

בהצלחה!

השאלות

שימו לב: יש להסביר את כל הפעולות, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה. חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.

ענו על שלוש מן השאלות 1-5, לפחות על שאלה אחת מכל פרק (לכל שאלה – $33\frac{1}{3}$ נקודות).
שימו לב: אם תענו על יותר משלוש שאלות, ייבדקו רק שלוש התשובות הראשונות שבמחברת.

פרק ראשון – גאומטרייה אנליטית, וקטורים, טריגונומטרייה במרחב, מספרים מרוכבים

1. נתונים שני מעגלים המשיקים זה לזה מבחוץ.
מרכזו של המעגל האחד הוא בנקודה M ומשוואתו היא $(x - a)^2 + y^2 = r^2$, a הוא פרמטר חיובי.
מרכזו של המעגל האחר הוא בנקודה N ומשוואתו היא $(x - 14)^2 + y^2 = R^2$.
אורכו של הקטע המחבר את מרכזי המעגלים הוא 9, והיחס בין אורכי הרדיוסים של המעגלים הוא $r < R, 1:2$.
א. מצאו את משוואת המעגל שמרכזו N ואת שתי האפשרויות למשוואת המעגל שמרכזו M .
נתון כי $a < 14$.
ב. סרטטו במערכת צירים אחת סקיצה של שני המעגלים ושל כל המשיקים המשותפים לשני המעגלים.
ג. מצאו את משוואת המשיק העובר בנקודה המשותפת לשני המעגלים.
ד. הישר $mx - y + n = 0$ הוא משיק משותף לשני המעגלים. מצאו את m ואת n (שתי אפשרויות).
נתונים שני מעגלים אחרים המשיקים זה לזה מבחוץ.
משוואות המעגלים הן: $(x - t)^2 + y^2 = r^2$; $(x - k)^2 + y^2 = R^2$, $k < t$, הם פרמטרים.
ערכי הרדיוסים r ו- R זהים לאלה שמצאתם בסעיף א.
ה. האם ייתכן כי שני הישרים שאת משוואותיהם מצאתם בסעיף ד משיקים גם למעגלים האלה?
אם כן – מצאו את t ואת k . אם לא – נמקו.

2. נתונות ארבע נקודות הנמצאות באותו המישור: $A(4, p, -1)$, $B(7, 5, 5)$, $C(1, -1, 2)$, $D(-2, 5, -4)$.
 p הוא פרמטר.

א. מצאו את משוואת המישור $ABCD$.

ב. חשבו את ערך הפרמטר p .

ג. הוכיחו כי המרובע $ABCD$ הוא ריבוע.

הנקודה S היא קודקוד של פירמידה $SABCD$ שבסיסה $ABCD$.

המקצוע SC מונח על הישר $\underline{x} = (0, -4, 1) + t(1, 3, 1)$.

נתון כי נפח הפירמידה הוא 81.

ד. מצאו את שיעורי הנקודה S (שתי אפשרויות).

נתון מישור נוסף π המאונך למקצוע SC .

ה. מצאו את הזווית שבין המישור $ABCD$ ובין המישור π .

3. נתונה המשוואה $z, \bar{z}^2 + z\bar{z} = \bar{z} + 2z + 9 - 7i$, הוא מספר מרוכב.

z_1 הוא אחד הפתרונות של המשוואה, והוא מייצג נקודה הנמצאת במישור גאוס ברביע הראשון, על מעגל שמרכזו בראשית הצירים.

א. מצאו את משוואת המעגל.

חוסמים במעגל ריבוע שאחד מקודקודיו מיוצג על ידי המספר z_1 .

ב. חשבו את שטח הריבוע.

ג. מצאו את השיעורים של שאר קודקודי הריבוע.

מכפילים ב- $r_1 \cdot (\cos(\alpha) + i \sin(\alpha))$ כל אחד מן המספרים המייצגים את שני קודקודי הריבוע שנמצאים ברביעים הראשון והשלישי, ומכפילים ב- $r_2 \cdot (\cos(\alpha + 60^\circ) + i \sin(\alpha + 60^\circ))$ כל אחד מן המספרים המייצגים את שני קודקודי הריבוע שנמצאים ברביעים השני והרביעי.

הנקודות במישור גאוס המייצגות את התוצאות שהתקבלו לאחר ההכפלה יוצרות מרובע קמור חדש במישור גאוס.

נתון: r_1 ו- r_2 חיוביים, $r_1 \neq r_2$.

ד. מהו סוג המרובע שהתקבל? נמקו את התשובה.

נתון כי שטח המרובע שהתקבל גדול פי 1.4 משטח הריבוע שחישבתם בסעיף ב.

ה. חשבו את $r_1 \cdot r_2$.

פרק שני – גדילה ודעיכה, פונקציות חזקה, פונקציות מעריכיות ולוגריתמיות

4. נתונה הפונקצייה $f(x) = xe^x - 2e^x + 1$ המוגדרת לכל x .

א. (1) מצאו את משוואות האסימפטוטות של הפונקצייה $f(x)$ המאונכות לציר ה- y (אם יש כאלה).

(2) מצאו את שיעורי נקודת החיתוך של גרף הפונקצייה $f(x)$ עם ציר ה- y .

(3) מצאו את תחומי העלייה ואת תחומי הירידה של הפונקצייה $f(x)$.

(4) סרטטו סקיצה של גרף הפונקצייה $f(x)$.

נתונה הפונקצייה $g(x) = \frac{1 - e^x}{e^x - x}$ המוגדרת לכל x .

ב. (1) מצאו את משוואות האסימפטוטות של הפונקצייה $g(x)$ המאונכות לציר ה- y .

(2) מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקצייה $g(x)$ עם ציר ה- x (אם יש כאלה).

(3) הוכיחו כי $g'(x) = \frac{f(x)}{(e^x - x)^2}$.

ג. היעזרו בסקיצה של גרף הפונקצייה $f(x)$ ומצאו כמה נקודות מקסימום וכמה נקודות מינימום יש לפונקצייה $g(x)$. נמקו את התשובה.

ד. סרטטו סקיצה של גרף הפונקצייה $g(x)$.

ה. חשבו את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקצייה $g(x)$, על ידי ציר ה- x ועל ידי הישר $x = -1$.

5. נתונה הפונקצייה $f(x) = x + \ln(x^2 - 3)$.

- א. (1) מצאו את תחום ההגדרה של הפונקצייה $f(x)$.
 (2) מצאו את משוואות האסימפטוטות של הפונקצייה $f(x)$ המאונכות לצירים (אם יש כאלה).
 (3) מצאו את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקצייה $f(x)$, וקבעו את סוגה.
 (4) סרטטו סקיצה של גרף הפונקצייה $f(x)$.
 היא פונקציית הנגזרת של הפונקצייה $f(x)$.
- ב. (1) מצאו את תחום ההגדרה של פונקציית הנגזרת $f'(x)$.
 (2) מצאו את משוואות האסימפטוטות של פונקציית הנגזרת $f'(x)$ המאונכות לצירים.
 (3) מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של פונקציית הנגזרת $f'(x)$ עם הצירים (אם יש כאלה).
 (4) סרטטו סקיצה של גרף פונקציית הנגזרת $f'(x)$ אם ידוע כי אין לה נקודות קיצון.
- נתונה הפונקצייה $g(x) = e^{f(x)}$ המוגדרת באותו התחום כמו הפונקצייה $f(x)$.
- ג. (1) מצאו את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקצייה $g(x)$, וקבעו את סוגה.
 (2) מצאו את תחומי העלייה ואת תחומי הירידה של הפונקצייה $g(x)$.
- ד. חשבו את השטח המוגבל על ידי הפונקצייה $y = f'(x) \cdot g(x)$, על ידי ציר ה- x ועל ידי הישרים $x = -4$ ו- $x = -3$.

בהצלחה!